УДК 532.51

Новый метод решения краевой задачи Дирихле для продольного обтекания тонкого тела вращения идеальной жидкостью

Л.Н. Корниенко, Е.И. Якушенко **inf_@inbox.ru**

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Анализируется краевая задача Дирихле для осесимметричного продольного обтекания идеальной жидкостью тонкого тела вращения. Получено необходимое для решения уравнение движения жидкости. Найдено его фундаментальное решение. Задача Дирихле сведена к интегральному уравнению Фредгольма 1 рода, которое решено.

Ключевые слова: уравнение движения идеальной жидкости, фундаментальное решение, тонкое тело вращения, продольное обтекание, интегральное уравнение, краевая задача Дирихле, решение, поле коэффициента гидродинамического давления.

Подробное изложение вопросов, связанных с аэродинамикой тонких тел без учета и с учетом сжимаемости потока дали Ф.И.Франкль и Е.А.Карпович в своей книге [1]. После выхода в свет этой книги опубликовано большое число работ по теории обтекания тонких тел, в том числе с использованием методов возмущений жидкости [2, 3]. Основные результаты исследований в этой области систематически изложены в обзорной статье Г.Г.Черного “Теория сверхзвуковых течений жидкости” [4].

В настоящей работе предложен новый метод решения рассматриваемой задачи с использованием интегрального уравнения типа Фредгольма 1 рода для краевой задачи Дирихле, которое решено.

Первоначально получим такое дифференциальное уравнение движения жидкости, при котором можно упростить решение.

1. Осесимметричное течение жидкости

Воспользуемся условиями сплошности и отсутствия вихрей в потоке в цилиндрической системе координат [5]:

$$divV = 0; \quad \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\upsilon_\rho\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\upsilon_z\right) = 0\,, \tag{1.1}$$

$$rot\,V = 0; \quad \frac{\partial\upsilon_\rho}{\partial z} - \frac{\partial\upsilon_z}{\partial\rho} = 0\,. \tag{1.2}$$

Для их преобразования используем подстановку Л.И.Седова [6]

$$\left.\begin{aligned} \upsilon_z &= \upsilon\cos\alpha \\ \upsilon_\rho &= \upsilon\sin\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{1.3}$$

Здесь $\upsilon_z, \upsilon_\rho$ — проекции вектора скорости жидкости на цилиндрические оси Z и ρ, соответственно; υ — модуль V; α — угол между вектором скорости V и осью симметрии Z; $\alpha = \alpha(z,\rho)$ — определяет поле углов наклона к оси Z касательных к линиям тока.

После подстановки и преобразований можно записать

$$\left.\begin{aligned} divV = 0;\ \frac{\sin\alpha}{\rho} + \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial\rho}\sin\alpha + \frac{\partial\alpha}{\partial\upsilon}\cos\alpha = -\frac{\partial\ln\upsilon}{\partial z}\cos\alpha + \sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z}. \\ rot\,V = 0;\ \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial z}\sin\alpha + \cos\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial z} = -\frac{\partial\ln\upsilon}{\partial\rho}\cos\alpha - \sin\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial\rho}. \end{aligned}\right\}.$$

Из этой системы уравнений найдем дифференциальные зависимости между $\ln\upsilon$ и α.

Для краткости записей и упрощения преобразований воспользуемся определителями второго порядка и следующими обозначениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial\rho} = \phi'_\rho; \quad \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial z} = \phi'_z \\ \frac{\partial\alpha}{\partial z} = \alpha'_z; \quad \frac{\partial\alpha}{\partial\rho} = \alpha'_\rho \end{aligned}\right\}. \tag{1.4}$$

В результате получим

$$\begin{cases} \dfrac{\sin\alpha}{\upsilon} + \begin{vmatrix} \varphi'_\rho & -\cos\alpha \\ \alpha'_\rho & \sin\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'_z & -\sin\alpha \\ \alpha'_z & -\cos\alpha \end{vmatrix} & (1.5) \\ \begin{vmatrix} \varphi'_\rho & \sin\alpha \\ \alpha'_\rho & \cos\alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'_z & -\cos\alpha \\ \alpha'_z & \sin\alpha \end{vmatrix} & (1.6) \end{cases}.$$

При решении этой системы уравнений воспользуемся двумя известными свойствами определителей:

Свойство I

$$h\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & hb \\ c & hd \end{vmatrix}.$$

Свойство II

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b+e \\ c & d+f \end{vmatrix}.$$

Для получения первого решения с учетом свойства I, умножим (1.5) на $\cos\alpha$, а (1.6) на $(-\sin\alpha)$. Результат сложим почленно. С учетом свойства II получим

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} + \begin{vmatrix} \phi'_\rho & -1 \\ \alpha'_\rho & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi'_z & 0 \\ \alpha'_z & -1 \end{vmatrix}.$$

С учетом (1.4) из последнего уравнения будем иметь

$$\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\rho} + \frac{\partial\alpha}{\partial\rho} = -\frac{\partial\ln\upsilon}{\partial z}. \qquad (1.7)$$

Для получения второго решения умножим (1.5) на $\sin\alpha$, а (1.6) на $\cos\alpha$. После аналогичных преобразований найдем

$$\frac{\sin^2\alpha}{\rho} + \begin{vmatrix} \varphi'_\rho & 0 \\ \alpha'_\rho & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi'_z & -1 \\ \alpha'_z & 0 \end{vmatrix}$$

или

$$\frac{\sin^2\alpha}{\rho} + \frac{\partial\ln\upsilon}{\partial\rho} = \frac{\partial\alpha}{\partial z}. \qquad (1.8)$$

Дифференцируя (1.7) по ρ, а (1.8) по z, и вычитая из первого второе, с учетом $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$, запишем

$$\Delta\alpha + \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{2\rho}\sin 2\alpha\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2\rho}\cos 2\alpha\right) = 0. \qquad (1.9)$$

Выражение (1.9) является нелинейным уравнением эллиптического типа. Его точное решение в [7] отсутствует.

Для возможности его дальнейшего использования линеаризируем (1.9) при малых углах α, при справедливости равенств

$$\sin 2\alpha \cong 2\alpha; \quad \cos 2\alpha \cong 1. \tag{1.10}$$

С учетом (1.10) из (1.9) найдем искомое уравнение:

$$\Delta\alpha + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\alpha}{\partial\rho} - \frac{\alpha}{\rho^2} = 0. \tag{1.11}$$

Равенство (1.11) отличается от уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат тем, что в уравнении Лапласа отсутствует слагаемое вида

$$-\frac{\alpha}{\rho^2}.$$

2. Фундаментальное решение

Преобразуем (1.11) с помощью подстановки

$$\alpha = \Phi \cdot \rho^n. \tag{2.1}$$

После преобразований запишем

$$\Delta\Phi + (2n+1)\rho^{-1}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + (n^2-1)\rho^{-2}\Phi = 0. \tag{2.2}$$

Его можно существенно упростить (при $n = -1$), то есть привести к виду

$$\Delta\Phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} = 0, \tag{2.3}$$

где $\Phi = \alpha\rho$. (2.4)

Такое уравнение совпадает с уравнением для функции тока при осесимметричном течении идеальной жидкости в цилиндрической системе координат [5]. Его фундаментальное решение определяется следующим выражением

$$\Phi = -\frac{q}{4\pi}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right). \tag{2.5}$$

Здесь q — интенсивность особенности.

С учетом (2.4) преобразуем уравнение (2.5)

$$\alpha = -\frac{q}{4\pi\rho}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+\rho^2}}\right). \tag{2.6}$$

Легко проверить, что это фундаментальное решение для (1.11) удовлетворяет следующим граничным условиям на бесконечности

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\rho\to\infty}\alpha(z,\rho) = 0 \\ \lim\limits_{z\to\infty}\alpha(z,\rho) = 0 \end{array}\right\}. \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) фундаментальное решение (2,5) позволяет найти выражение интегрального уравнения для краевых условий на образующей $r=r(z)$ поверхности обтекаемого тела вращения, где $r(z)$ его радиус.

На поверхности тела вращения линия тока совпадает с образующей $r=r(z)$ его поверхности. Очевидно, что в этом случае должны выполняться следующие краевые условия на самой образующей:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha(z)\cong r'(z);\\ \rho=r(z);\\ \Phi(z)=\alpha\cdot\rho=r'(z)r(z);\\ \Phi(a)=\Phi(b)=r(a)=r(b)=0\end{array}\right\}. \tag{2.8}$$

3. Краевое интегральное уравнение

Из (2.5) следует, что интегральное уравнение для краевых условий (2.8) можно записать в виде [5]

$$\Phi(z)=-\frac{1}{4\pi}\left(\int_a^b q(t)\,dt-\int_a^b\frac{q(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2+r^2(z)}}\right), \tag{3.1}$$

где $(b-a)$ — длина тонкого тела; $\Phi(z)$ и $r(z)$ — известные функции; $q(t)$ — необходимо определить, как распределена интенсивность по оси симметричности z. Для того, чтобы получить аналитическое решение интегрального уравнения (3.1), его следует упростить, используя условие для тонкого тела. В этом случае можно перенести краевые условия с образующей поверхности на ось симметрии z.

В результате получим

$$\Phi(z)=-\frac{1}{4\pi}\left(\int_a^b q(t)\,dt-\int_a^b\frac{q(t)(z-t)\,dt}{|z-t|}\right). \tag{3.2}$$

Это равенство является интегральным уравнением Фредгольма 1 рода с ядром вида

$$K(z,t)=1-\frac{z-t}{|z-t|},$$

аналитическое решение которого можно найти.

4. Решение интегрального уравнения Фредгольма 1 рода

Если продифференцировать по переменной z уравнение (3.2), получим равенство

$$\Phi'(z) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d}{dz}\int_a^b q(t)\,dt - \frac{d}{dz}\int_a^b \frac{q(t)(z-t)\,dt}{|z-t|}\right). \qquad (4.1)$$

Здесь $\frac{d}{dz}\int_a^b q(t)\,dt = 0$ — как производная от постоянной величины.

С учетом [8] и особенностей второго интеграла (4.1) запишем

$$\int_a^b \frac{q(t)(z-t)\,dt}{|z-t|} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z-\varepsilon} \frac{q(t)(z-t)\,dt}{z-t} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{z+\varepsilon}^{b} \frac{q(t)(z-t)\,dt}{t-z} =$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z} q(t)\,dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{z-\varepsilon} q(t)\,dt + \int_b^{z} q(t)\,dt + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_z^{z+\varepsilon} q(t)\,dt.$$

Откуда найдем

$$\int_a^b \frac{q(t)(z-t)\,dt}{|z-t|} = \int_a^z q(t)\,dt + \int_b^z q(t)\,dt. \qquad (4.2)$$

Подставим (4.2) в (4.1). После дифференцирования (4.2) получим искомое решение уравнения (3.2)

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi} q(z)$$

или

$$q(z) = 2\pi\Phi'(z), \qquad (4.3)$$

где $\Phi(z) = r(z)\cdot r'(z)$ известная функция.

При известной интенсивности $q(z) = 2\pi\Phi'(z)$ поле углов наклона касательных к линиям тока в жидкости обтекающей данное тело будет определяться выражением

$$\alpha(z,\rho) = -\frac{1}{2\rho}\left[\int_a^b \Phi'(t)\,dt - \int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2+\rho^2}}\right].$$

где первый интеграл с учетом (2.8) равен нулю.

В этом случае запишем последнее уравнение следующим образом

$$\alpha(z,\rho) = -\frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\sqrt{(z-t)^2+\rho^2}}. \qquad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что $\alpha(z,\rho)$ удовлетворяет нулевым граничным условиям на бесконечности при $z\to\infty$ и при $\rho\to\infty$, учитывая (2.8).

5. Величина коэффициента гидродинамического давления на поверхности обтекаемого тела

Для определения поля гидродинамического давления вокруг обтекаемого тела и на его поверхности воспользуемся уравнениями (1.7) и (1.8) при малой величине угла α, которые в этом случае примут вид:

$$\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial \rho} = \frac{\partial \alpha}{\partial z}; \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z} = -\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} - \frac{\alpha}{\rho}. \tag{5.2}$$

Используя (4.4) найдем производную $\frac{\partial \alpha}{\partial z}$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial z}(\alpha, z) = \frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[(z-t)^2+\rho^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2\rho}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)^2\,dt}{\left[(z-t)^2+\rho^2\right]^{3/2}}. \tag{5.3}$$

Подставим (5.3) в (5.1) и результат проинтегрируем по переменной ρ. Получим

$$\begin{gathered}\ln \upsilon = \int \frac{\partial \alpha}{\partial z}\,d\rho = \frac{1}{2}\int_a^b \Phi'(t)\,dt \int \frac{d\rho}{\rho\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}} - \\ -\frac{1}{2}\int_a^b \Phi'(t)(z-t)^2\,dt \int \frac{d\rho}{\rho\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{3/2}} + C(z)\end{gathered}. \tag{5.4}$$

После вычисления неопределенных интегралов и упрощений в (5.4) будем иметь

$$\ln \upsilon = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}} + C(z) \tag{5.5}$$

Определим значение функции $C(z)$.

Для этого найдем производную $\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z}$ из (5.5), выражения $\frac{\partial \alpha}{\partial \rho}$ и $\frac{\alpha}{\rho}$ с использованием (4.4), которые будут равны

$$\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial z} = \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{3/2}} + C'(z); \tag{5.6}$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \rho} = -\frac{1}{2\rho^2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}} - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{3/2}}; \tag{5.7}$$

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{1}{2\rho^2}\int_a^b \frac{\Phi'(t)(z-t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}}. \tag{5.8}$$

Подставим (5.6), (5.7) и (5.8) в уравнение (5.2). После сокращений определим, что

$$C'(z)=0,$$

т.е. $C(z)=C_1=const.$ (5.9)

Так как C_1 произвольная постоянная, будем полагать, что

$$C_1=\ln\upsilon_\infty. \tag{5.10}$$

Подставим (5.10), с учетом (5.9), в (5.5). После преобразования найдем выражение

$$\upsilon=\upsilon_\infty\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_a^b\frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}}\right\}, \tag{5.11}$$

которое определяет поле скоростей в осесимметричном потоке жидкости.

Для определения значений коэффициента гидродинамического давления $\overline{p}$ в жидкости воспользуемся его известным выражением [9]

$$\overline{p}=1-\left(\frac{\upsilon}{\upsilon_\infty}\right)^2. \tag{5.12}$$

Подставим в последнее уравнение равенство (5.11) и запишем

$$\overline{p}=1-\exp\left\{-\int_a^b\frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[\rho^2+(z-t)^2\right]^{1/2}}\right\}. \tag{5.13}$$

где $\Phi'(t)=\left[r'(t)\right]^2+r(t)r''(t)$

При определении распределения коэффициента давления $\overline{p}_s$ вдоль обтекаемой поверхности в уравнении (5.13) нужно выполнить условие $\rho=r(z)$. Окончательно найдем

$$\overline{p}_s=1-\exp\left\{-\int_{a+\varepsilon}^{b-\varepsilon}\frac{\Phi'(t)\,dt}{\left[r^2(z)+(z-t)^2\right]^{1/2}}\right\}. \tag{5.14}$$

где в пределах интегрирования добавляется малая величина ε ввиду того, что $r'(a)=\infty$, $r'(b)=\infty$.

6. Заключение

Решение (5.14) является достаточно общим. С его помощью можно, например, исследовать обтекание идеальной жидкостью тонкого слабо гофрированного тела и т.д.

Используя полученные результаты, можно так же определить поле линий тока и поле гидродинамического давления в потоке обтекающем тонкое тело вращения.

Список литературы

1. Франкль Ф.И., Карпович Е.А. Газодинамика тонких тел. М.;Л. ГИТТЛ, 1948.176 с.
2. Ван-Дайк. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 312 с.
3. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 276 с.
4. Черный Г.Г. Теория сверхзвуковых течений газа. //В кн. Механика в СССР за 50 лет. Т.2/ М.: Наука, 1970.
5. Кочин Н.С., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.1. М.: ГИТТЛ, 1955. 560 с.
6. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 444 с.
7. Полянин А.Д., Зайцев В.Ф. Нелинейные уравнения математической физики. Точные решения. Справочник. М.: ФМЛ, 2002. 432 с.
8. Полянин А.Д., Манжиров А.В. В.Ф. Справочник по интегральным уравнениям. М.: ФМЛ, 2003. 608 с.
9. Федяевский К.К., Войткунский Я.И., Фаддеев Ю.И. Гидромеханика. Л.: Судостроение, 1968. 568 с.

A new method to solve Derichlet's boundary problem for a longitudinal flow of a thin solid of revolution by an ideal liquid

Kornienko L.N.,Yakushenko E.I.

Derichlet's boundary problem for axisymmetric longitudinal flow of a solid of rotation by an ideal liquid is analyzed. A necessary equation of liquid flow is derived for the solution. Its fundamental solution is found. Derichlet's problem is reduced to Fredholm's integral equation of the first type, the latter being solved.

Keywords: equation of an ideal liquid flow, fundamental solution, thin solid of revolution, longitudal flow, integral equation, Derichlet's boundary problem, field of the coefficient of the hydrodynamic pressure.